

# Estimação espaço-temporal de chuva extrema: o estimador mixed moment

Jessica Silva Lomba<sup>1</sup>, Maria Isabel Fraga Alves<sup>2</sup> e Cláudia Neves<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup>CEAUL e DEIO, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Portugal

<sup>3</sup>Department of Mathematics and Statistics, University of Reading, United Kingdom

<sup>1</sup>jslomba@fc.ul.pt



Ciências  
ULisboa



Centro de Estatística e Aplicações  
Universidade de Lisboa



University of  
Reading

## Resumo

A **estatística de valores extremos** foca-se na estimação da probabilidade de eventos extremos que raramente ou nunca foram observados no passado. Para tal, é imperativa a estimação eficaz do **índice de valores extremos**  $-\gamma$ , parâmetro que determina o peso da cauda da distribuição subjacente aos dados. Neste trabalho, mostramos que as propriedades gerais de consistência e normalidade assintótica do estimador *mixed moment* (eMM) de  $\gamma$  [2] não se alteram na presença de **heteroscedasticidade no espaço e no tempo** – uma tendência não-monótona na **frequência dos extremos**. O eMM é aplicado a dados de chuva extrema no Mar do Norte.

## 1. Estimador *Mixed Moment*

Trabalhamos com vetores aleatórios  $(X_{i,1}, \dots, X_{i,m})$ , independentes para cada **dia**  $i = 1, \dots, n$  e com dependência espacial entre as **localizações**  $j = 1, \dots, m$ .

Representamos por  $X_{1:N} \leq \dots \leq X_{N-k:N} \leq \dots \leq X_{N:N}$  as estatísticas ordinais da amostra  $\{X_{i,j}\}_{i=1}^n_{j=1}^m$  de dimensão  $N := n \times m$ .

$$\hat{\gamma}_N^{MM}(k) := \frac{\hat{\varphi}_N(k) - 1}{1 + 2 \min\{\hat{\varphi}_N(k) - 1, 0\}}$$

$$\text{onde } \hat{\varphi}_N(k) := \frac{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log \left( \frac{X_{N-i+1:N}}{X_{N-k:N}} \right) - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left( 1 - \frac{X_{N-k:N}}{X_{N-i+1:N}} \right)}{\left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left( 1 - \frac{X_{N-k:N}}{X_{N-i+1:N}} \right) \right)^2}.$$

## 2. Contexto

Consideramos uma *distribuição de referência*  $F_0$ , com limite superior do suporte  $x^* := \sup\{x : F_0(x) < 1\}$ , que pertence ao domínio de atração de uma distribuição de valores extremos:  $F_0 \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}(G_\gamma)$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Isto é, o máximo normalizado de uma amostra aleatória de  $n$  de variáveis distribuídas segundo  $F_0$  converge, quando  $n \rightarrow \infty$ , para uma distribuição de valores extremos com índice de valores extremos  $\gamma$ .

Para cada observação  $X_{i,j}$ , indexada no tempo  $i$  e espaço  $j$ , representamos por  $F_{i,j}$  a sua função de distribuição, com o mesmo limite superior do suporte  $x^*$ . Impomos a seguinte condição principal:

**Existência de tendência:** Existe uma função positiva  $c$  – *scedasis* – que captura, no limite, a frequência relativa dos extremos da distribuição  $F_{i,j}$  face à referência  $F_0$ :

$$\lim_{x \uparrow x^*} \frac{1 - F_{i,j}(x)}{1 - F_0(x)} = c \left( \frac{i}{n}, j \right) \in (0, \infty)$$

Esta condição determina que  $F_{i,j} \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}(G_\gamma)$  para um índice de valores extremos  $\gamma \in \mathbb{R}$  comum.

## 3. Comportamento Limite do Estimador *Mixed Moment*

Neste contexto, sob algumas condições usuais, prova-se que

$$\sqrt{k} \left\{ \hat{\gamma}_N^{MM}(k) - \gamma \right\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N \left( \text{viés}, \sigma^2(\gamma) \right),$$

$$\text{onde } \sigma^2(\gamma) := \begin{cases} \sigma_{IID}^2(\gamma) + \frac{(1+\gamma)^4}{\gamma^2} \times \iint_{[0,1]^2} f_\gamma(s) f_\gamma(t) \sum_{j_1 \neq j_2} \mathbb{E} [\alpha_{j_1}(s) \alpha_{j_2}(t)] ds dt, & \gamma > 0 \\ \sigma_{IID}^2(\gamma) + \frac{(1-\gamma)^4(1-2\gamma)^2}{\gamma^2} \times \iint_{[0,1]^2} g_\gamma(s) g_\gamma(t) \sum_{j_1 \neq j_2} \mathbb{E} [\beta_{j_1}(s) \beta_{j_2}(t)] ds dt, & \gamma \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{com } \sigma_{IID}^2(\gamma) = (1 + \gamma)^2 \text{ se } \gamma > 0 \text{ e } \sigma_{IID}^2(\gamma) = \frac{(1-\gamma)^2(1-2\gamma)(6\gamma^2-\gamma+1)}{(1-3\gamma)(1-4\gamma)} \text{ caso contrário.}$$

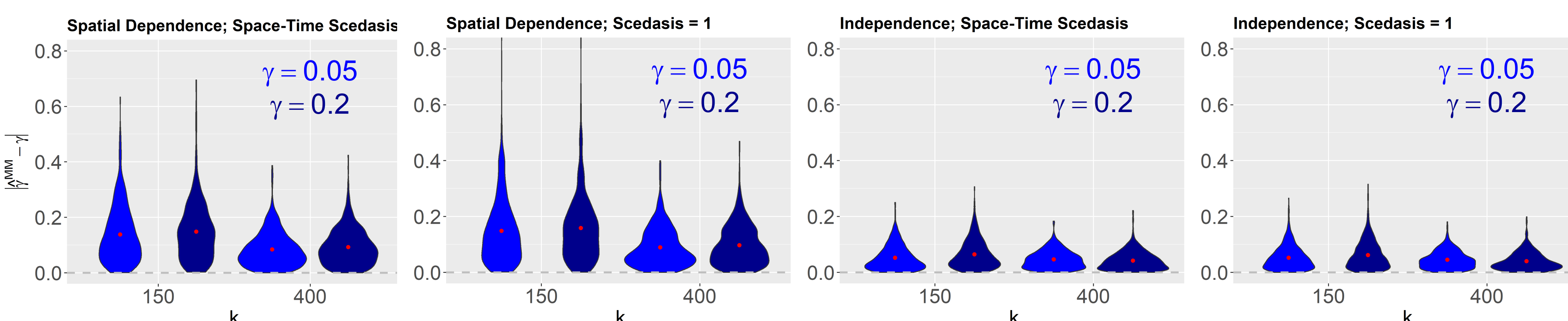
Aqui, note-se que  $\sigma_{IID}^2(\gamma)$  e **viés** coincidem com a variância e o viés assintóticos do eMM no contexto em que as observações são independentes e identicamente distribuídas (IID). Define-se ainda

$$\begin{cases} f_\gamma(s) := 1 - (1 + 2\gamma)s^\gamma \\ g_\gamma(s) := (1 - 2\gamma)s^{-\gamma} - 1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \alpha_j(s) := s^{-1}W_j(s, C_j(1)) - W_j(1, C_j(1)) \\ \beta_j(s) := s^{-\gamma-1}W_j(s, C_j(1)) - W_j(1, C_j(1)) \end{cases}, \quad \text{para cada } j = 1, \dots, m,$$

onde  $(W_1, \dots, W_m)$  é um vetor de movimentos Brownianos bivariados e  $C_j(1)$  representa a *scedasis* total (integrada ao longo do tempo) para cada ponto no espaço  $j = 1, \dots, m$ .

## 4. Estudo de Simulação – $\gamma > 0$

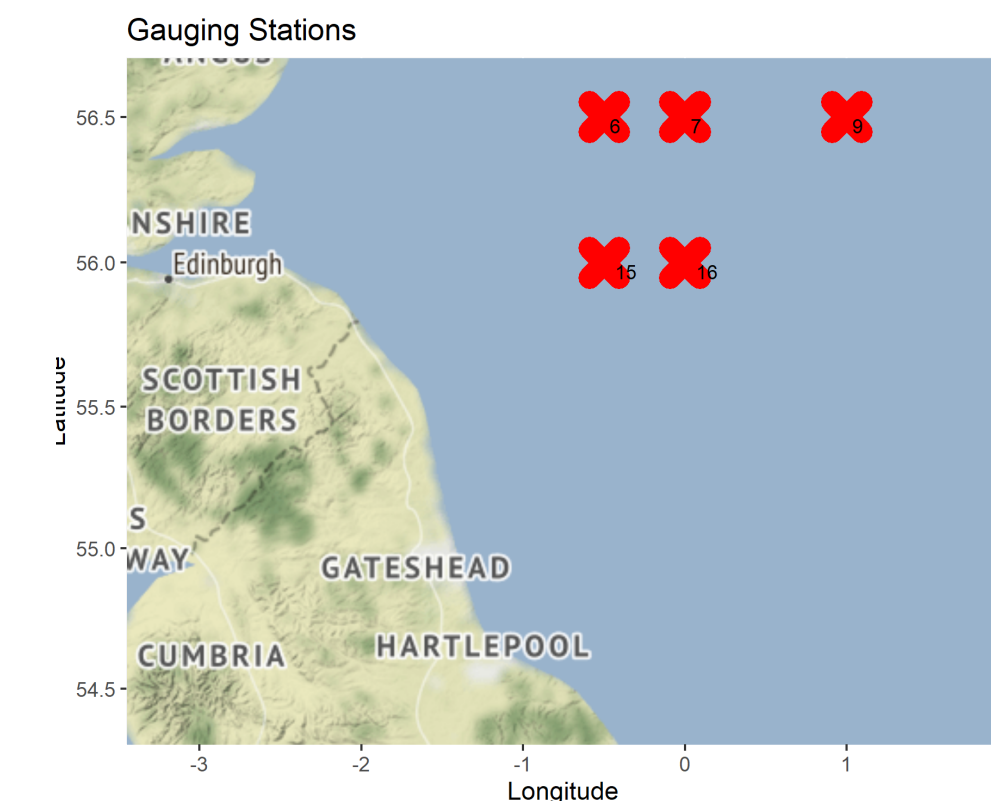
Mostramos o valor absoluto do viés estimado,  $|\hat{\gamma}_N^{MM}(k) - \gamma|$ , para  $m = 5$ ,  $n = 2000$  e 500 corridas:



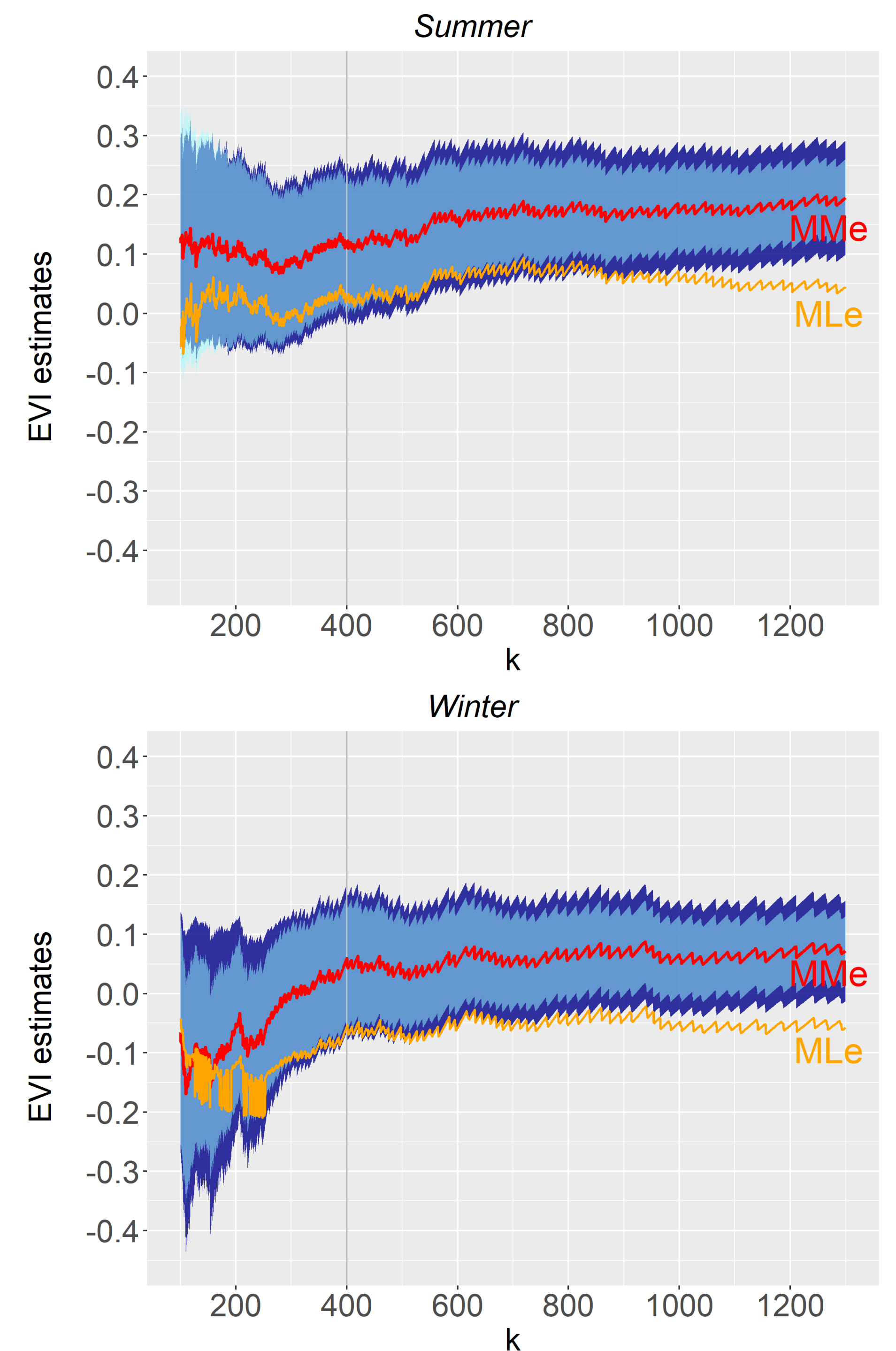
Dependência: processo Brown-Resnick; Independência: distribuição Generalizada Pareto.

## 5. Aplicação – Chuva no Mar do Norte

Dados de chuva diária total obtidos por reanálise para  $m = 5$  pontos no Mar do Norte. Registos referentes ao Verão e Inverno entre Janeiro de 1979 e Dezembro de 2010. Trabalhamos com  $n = 1358/1341$  dias.



Usando as  $k = 400$  maiores observações, o *threshold* (nível) fixa-se em 13.2mm/13.9mm, determinando as estimativas  $\hat{\gamma}_S^{MM}(400) = 0.118$  e  $\hat{\gamma}_W^{MM}(400) = 0.060$ .



Trajetórias estimadas para o eMM (vermelho), com bandas de 95% confiança considerando dependência/independência espacial (escura/clara). Trajetória do estimador de máxima verosimilhança (laranja) para comparação.

## 6. Comentários Finais

- ★ A presença de tendência (*scedasis*) não afeta o viés assintótico do eMM comparativamente ao caso IID.
- ★ Os resultados do estudo de simulação sugerem que para caudas pesadas ( $\gamma > 0$ ), a heteroscedasticidade não tem grande influência na performance do eMM, mas a dependência espacial aumenta a variabilidade na estimação de  $\gamma$ .
- ★ Ignorar a estrutura de dependência leva à potencial subestimação da variância, resultando em intervalos de confiança mais estreitos e possível subestimação da probabilidade de chuva extrema.

## References

- [1] J. H. J. Einmahl, A. Ferreira, L. de Haan, C. Neves, and C. Zhou. Spatial dependence and space-time trend in extreme events. *The Annals of Statistics*, 2021. To appear.
- [2] M. I. Fraga Alves, M. I. Gomes, L. de Haan, and C. Neves. Mixed moment estimator and location invariant alternatives. *Extremes*, 12:149–185, 2009.